Primeri pozicionih brojčanih sistema

1. **Dekadni sistem**: $S = \{0, 1, \ldots, 9\}, N = 10$

$$(2658)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \tag{1}$$

   Postoji i drugi način računanja broja, a to je pomoću Hornerove šeme koja se često primenjuje u programiranju:

$$(2658)_{10} = (((2 \cdot 10) + 6) \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 8 \tag{2}$$

2. **Binarni sistem**: $S = \{0, 1\}, N = 2$
   Veoma primenjiv u računarstvu.

   - u dekadnom sistemu:
     $(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (22)_{10}$
     $(10)_2 = (2)_{10}$
     $(110)_2 = (6)_{10}$
     $(1011010010)_2 = (722)_{10}$

3. **Oktalni sistem**: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, N = 8$
   $(6732)_8 = 6 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = (3546)_{10}$
   $(233.12)_8 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2} = (155.15625)_{10}$
   $(123.456)_8 = (83.58984375)_{10}$

4. **Heksadekadni sistem**: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$, N = 16
   $(1A3)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = (419)_{10}$
   $(2C)_{16} = (44)_{10}$
   $(FFFF)_{16} = (65535)_{10}$
   $(23B2E)_{16} = (146222)_{10}$

5. **Troični sistem**: $S = \{0, 1, 2\}, N = 3$
   $(212001)_3 = 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = (622)_{10}$

6. **Balansirani troični brojčani sistem**: $S = \{-1, 0, 1\}, N = 3$
   $(10-1-100)_{bt} = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (207)_{10}$
   $(10-1-101)_{bt} = 1 \cdot 3^5 + (-1) \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + (-1) = 243 - 81 + 27 - 1 = 188$

   Kvantno Računarstvo: Pominje se primena balansiranog ternarnog predstavljanja za dizajniranje kvantnog ternarnog kola. Ovo predstavlja novu upotrebu u oblasti kvantnog računarstva.

7. **Brojčani sistem sa negativnom osnovom**: Osnova sistema je $-N$, a cifre su u intervalu $[0, N-1]$:

   - $N = -10, S = \{1, 2, \ldots, 9\}$:
     $(672.23)_{-10} = 6 \cdot -10^2 + 7 \cdot -10^1 + 2 \cdot -10^0 + 2 \cdot -10^{-1} + 3 \cdot -10^{-2} = (531.83)_{10}$

   - *negabinarni brojčani sistem*: $N = -2, S = \{1, 2\}$
     $(101101)_{-2} = 1 \cdot -2^5 + 0 \cdot -2^4 + 1 \cdot -2^3 + 1 \cdot -2^2 + 0 \cdot -2^1 + 1 \cdot -2^0 = (-35)_{10}$

     Primene: teorijsko računarstvo, teorijska matematika ...

8. **Brojčani sistem sa razlomljenom osnovom**: $N = 0.5, S = \{0, \ldots, 9\}$
   $(145)_{0.5} = 1 \cdot 0.5^2 + 4 \cdot 0.5^1 + 5 \cdot 0.5^0 = (7.25)_{10}$
   $(762.32)_{0.5} = 7 \cdot 0.5^2 + 6 \cdot 0.5^1 + 2 \cdot 0.5^0 + 3 \cdot 0.5^{-1} + 2 \cdot 0.5^{-2} = (18.75)_{10}$

9. **Brojčani sitem osnove** $N = 7, S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $(41563)_7 = (10237)_{10}$

Prevođenje razlomljenih brojeva

1. $(7102.7)_{10} \rightarrow (\ldots)_3$

7102	2367	789	263	87	29	9	3	1
1	0	0	2	0	2	0	0	1

0.7	0.1	0.3	0.9	0.7	...
0	2	0	0	2	...

Rezultat je: 100202001.20022002...

2. $(842.25)_{10} \rightarrow (\ldots)_7$

842	120	17	2
2	1	3	2

0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	...
0	1	5	1	5	...

Rezultat je: 2312.1515...

3. $(3132.32)_4 = (\ldots)_{10} = (\ldots)_5$

4. $(4302.14)_5 = (\ldots)_7$ bez međuprevođenja

4302	312	21	1
3	10	4	1

0.14	0.23	0.31	0.22	0.14	...
	2	3	4	3	...

Rezultat je: 1453.2343...

5. $(5431.3)_6 = (\ldots)_4$

5431	1234	205	31	4	1
3	2	1	3	0	1

0.3	0
	2

Rezultat je: 103123.2

6. $(2104.2)_5 = (\ldots)_4$

2104	234	32	4	1
3	1	1	0	1

0.2	0.3	0.2	...
	1	2	...

Rezultat je: 10113.121212....

Prevođenje iz dekadnog sistema

Neka je broj X zapisan u sistemu sa osnovom N, a želimo da ga zapišemo u sistemu sa osnovom M. Postupak se zasniva na deljenju osnovom traženog sistema, tj sa M i zapisivanjem ostatka. Cifre se određuju od cifre najmanje težine ka cifri najveće težine. Opisani postupak se odnosi na neoznačene cele brojeve.

Šematski postupak

i	0	1	2	...	p
X_i	X_0	X_1	X_2	...	X_p
y_i	y_0	y_1	y_2	...	y_p

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

X_{i+1} – celobrojni deo količnika X_i/M
y_i – ostatak pri ovom deljenju
Postupak se ponavlja sve dok se ne dođe do broja $X_{p+1} = 0$

Neka ceo broj x treba prevesti iz osnove 10 u osnovu n. Neka je pritom zapis broja x u osnovi n dat sa $(x)_n = x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0$. Važi da je $(x)_{10} = (x)_n$, odakle je

$$(x)_{10} = x_{k-1}n^{k-1} + x_{k-2}n^{k-2} + \ldots + x_1n^1 + x_0n^0$$

.

Deljenjem obe strane sa n se dobija

$$\frac{(x)_{10}}{n} = x_{k-1}n^{k-2} + x_{k-2}n^{k-3} + \ldots + x_1n^0 + x_0n^{-1}$$

.

Ako označimo $(x')_{10} = x_{k-1}n^{k-2} + x_{k-2}n^{k-3} + \ldots + x_1n^0$, dobija se

$$\frac{(x)_{10}}{n} = (x')_{10} + \frac{x_0}{n}$$

.

Očigledno je da je $(x')_{10}$ ceo broj. Kako su sve cifre sistema manje od osnove sistema, važi da je $x_0 \leq n$, pa je vrednost $\frac{x_0}{n}$ razlomljeni broj.

Na osnovu prethodnog sledi da se deljenjem polaznog dekadnog broja $(x)_{10}$ osnovom n može dobiti cifra x_0 na najnižoj poziciji, jer ona predstavlja ostatak pri tom deljenju. Količnik $(x')_{10}$ predstavlja međurezultat, na koji se može ponoviti prethodni postupak (broj $(x')_{10}$ se sada posmatra kao početna vrednost koja se deli sa n u cilju dobijanja naredne cifre).

Primeri:

1. $(3129)_{10} \rightarrow (6071)_8$

i	0	1	2	3
X_i	3129	391	48	6
y_i	1	7	0	6

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

2. $(3129)_{10} \rightarrow (110000111001)_2$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_i	3129	1564	782	391	195	97	48	24	12	6	3	1
y_i	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

3. $(3129)_{10} \rightarrow (C39)_{16}$

i	0	1	2
X_i	3129	195	12
y_i	9	3	C

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

4. $(842)_{10} \rightarrow (\ldots)_7$

842	120	17	2
2	1	3	2

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

Rezultat je 2312.

5. $(736)_{10} \rightarrow (\ldots)_6$

736	122	20	3
4	2	2	3

Rezultat je: 3224.

6. $(3620)_{10} \rightarrow (\ldots)_7$

3620	517	73	10	1
1	6	3	3	1

Rešenje je $(3620)_{10} = (13361)_7$.

7. Izračunati $(31230)_4 \rightarrow (\ldots)_{10} \rightarrow (\ldots)_5$

$(31230.32)_4 = 3 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} = (876.875)_{10}$

876	175	35	7	1
1	0	0	2	1

Rezultat je $(31230)_4 \rightarrow (876)_{10} \rightarrow (12001)_5$

8. Izračunati: $(4021)_5 = (\ldots)_{10} = (\ldots)_4$

$(4021)_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5 + 1 = 511$

$(511) = (1333)_4$

9.

3620	517	73	10	1
1	6	3	3	1

Rešenje je $(3620)_{10} = (13361)_7$.

Prevođenje razlomljenih brojeva iz dekadnog sistema

Kod prevođenja mešovitih brojeva imamo dva koraka. U prvom koraku izvršimo prevođenje celog dela broja, a u drugom koraku prevođenje razlomljenog dela broja. Prevođenje celog dela broja obavlja se po istom algoritmu kao i prevođenje celih brojeva, a prevođnje razlomljenog dela svodi se na niz mnozenja i cifre se određuju od cifre najveće težine ka cifri najmanje težine.

Šematski postupak

i	0	1	2	...	q
X_{-i}	X_{-0}	X_{-1}	X_{-2}	...	X_{-q}
y_{-i}	0	y_{-1}	y_{-2}	...	y_{-q}

smer čitanja cifara $\rightarrow$

X_{i+1} – razlomljeni deo proizvoda $X_i \cdot M$
y_i – ceo deo proizvoda
Postupak se ponavlja sve dok se ne dođe do broja $X_{-(q+1)} = 0$

Neka razlomljeni broj x treba prevesti iz osnove 10 u osnovu n. Neka je pritom zapis broja x u osnovi n dat sa $(x)_n = 0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-l}$. Važi da je $(x)_{10} = (x)_n$, odakle je

$$(x)_{10} = x_{-1}n^{-1} + x_{-2}n^{-2} + \ldots + x_{-l}n^{-l}$$

.

Množenjem obe strane sa n se dobija

$$n(x)_{10} = x_{-1}n^{0} + x_{-2}n^{-1} + \ldots + x_{-l}n^{-(l-1)}$$

.

Ako označimo $(x')_{10} = x_{-2}n^{-1} + \ldots + x_{-l}n^{-(l-1)}$, dobija se

$$n(x)_{10} = x_{-1} + (x')_{10}$$

.

Primetimo da je $(x')_{10}$ razlomljeni broj. Sledi da se množenjem polaznog dekadnog broja $(x)_{10}$ osnovom n može dobiti cifra x_{-1}, budući da ona predstavlja celobrojni deo rezultata. Razlomljeni deo $(x')_{10}$ predstavlja međurezultat, na koji se može ponoviti prethodni postupak (broj $(x')_{10}$ se sada posmatra kao početna vrednost koja se množi sa n u cilju dobijanja naredne cifre).

Dakle, algoritam za prevođenje razlomljenog dekadnog broja u osnovu n se sastoji od niza uzastopnih množenja brojem n, pri čemu se sva množenja vrše u dekadnoj osnovi. Celobrojni delovi koji se dobijaju pri množenju predstavljaju redom sleva nadesno cifre rezultata u osnovi nf, a razlomljeni delovi su međurezultati nad kojim se primenjuje uzastopno množenje. Postupak se ponavlja sve dok se ne dostigne vrednost 0, s tim što se u nekim slučajevima, kada se rezultat ne može napisati konačnim brojem cifara, vred- nost 0 ne dostiže. Tada se postupak može zaustaviti nakon određenog broja iteracija. Rezultujući zapis je u tom slučaju periodičan.

Primeri:

1. $(0.84375)_{10} \rightarrow (0.11011)_2$

i	0	1	2	3	4	5
X_{-i}	0.84375	0.6875	0.375	0.75	0.5	0.0
y_{-i}	0	1	1	0	1	1

smer čitanja cifara →

2. $(0.4)_{10} \to (0.011001100\ldots)_2$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_{-i}	0.4	0.8	0.6	0.2	0.4	0.8	0.6	0.2	0.4	0.8
y_{-i}	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

smer čitanja cifara →

3. $(0.4)_{10} \to (0.1212\ldots)_4$

i	0	1	2	3	4
X_{-i}	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4
y_{-i}	0	1	2	1	2

smer čitanja cifara →

4. $(12.375)_{10} \to (1100.011)_2$

i	0	1	2	3
X_i	12	6	3	1
y_i	0	0	1	1

← smer čitanja cifara

i	0	1	2	3
X_{-i}	0.375	0.75	0.5	0
y_{-i}	0	0	1	1

smer čitanja cifara →

5. $(77.44)_{10} \to (302.21)_5$

i	0	1	2
X_i	77	15	3
y_i	2	0	3

← smer čitanja cifara

i	0	1	2
X_{-i}	0.44	0.2	0.0
y_{-i}	0	2	1

smer čitanja cifara →

6. $(31.625)_{10} \to (11111.101)_2$

i	0	1	2	3	4
X_i	31	15	7	3	1
y_i	1	1	1	1	1

$\leftarrow$ smer čitanja cifara

i	0	1	2	3
X_{-i}	0.625	0.25	0.5	0.0
y_{-i}	0	1	0	1

smer čitanja cifara $\rightarrow$

Razni primeri prevođenja

1. $(1-1100-1)_{bt} \rightarrow (\ldots)_{10}$
2. $(D4C9.A2)_{16} \rightarrow (\ldots)_8$
3. $(842.25)_{10} \rightarrow (\ldots)_7$
4. $(102201)_3 \rightarrow (\ldots)_5$ bez međuprevođenja
5. Izračunati $(31230.32)_4 \rightarrow (\ldots)_{10} \rightarrow (\ldots)_5$
6. $(10-1-101)_{bt} \rightarrow (\ldots)_{10}$
7. $(736.35)_{10} \rightarrow (\ldots)_6$
8. izračunati: $(4021.3)_5 = (\ldots)_{10} = (\ldots)_4$
9. $(3620)_{10} \rightarrow (\ldots)_7$

Rešenja :

1. $(10-1-101)_{bt} = 1 \cdot 3^5 + (-1) \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + (-1) = 243 - 81 + 27 - 1 = 188$
2. $(D4C9.A2)_{16} = (1101010011001001.10100010)_2 = (152311.504)_8$
3.

842	120	17	2
2	1	3	2

0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	...
0	1	5	1	5	...

Rezultat je: 2312.1515...

4. $5_{10} \rightarrow (12)_3$

102201	2100	110	2
1	10	2	2

Rezultat je: 2231

5. $(31230.32)_4 = 3 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} = (876.875)_{10}$

876	175	35	7	1
1	0	0	2	1

6. $(10-1-101)_{bt} = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1 = 243 - 27 - 9 + 1 = 208$

7.

736	122	20	3
4	2	2	3

0.35	0.1	0.6	0.6	0.6	...
0	2	0	3	3	...

Rezultat je: 3224.2033

8. $(4021.3)_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5 + 1 = 3 \cdot 5^{-1} = 511.6$

   $(511.6) = (1333.2121\ldots)_4$

9.

3620	517	73	10	1
1	6	3	3	1

Rešenje je $(3620)_{10} = (13361)_7$.

Specijalni slučaj kodiranja

Specijalni slučaj kodiranja je kada imamo osnove M i N za koje važi $N = M^s; s > 1$.

- **Ako prevodimo iz osnove M u osnovu N ($M < N$ i $N = M^s$):** počevši od decimalne tačke izdvajamo po s cifara krećući se od decimalne tačke nalevo i nadesno. Ukoliko imamo manje od s cifra u poslednjoj, nedostajuće cifre dopunjujemo nulama u pravcu kretanja. Tako izdvojene grupe zapisujemo kao jednu cifru sistema sa osnovom N.
- **Ako prevodimo iz osnove N u osnovu M ($N > M$ i $N = M^s$):** svaku cifru iz osnove N zapisujemo sa s cifara osnove M.

Primeri:

1. $(D2.EA5)_{16} \rightarrow (1101|0010.1110|1010|0101)_2$
2. $(C1.F1F92)_{16} \rightarrow (30|01.33|01|33|21|02)_4$
3. $(10110001.0101101)_2 = (010|110|001.010|110|100)_2 \rightarrow (261.264)_8$
4. $(101101.01)_2 = (0010|1101.0100)_2 \rightarrow (2D.4)_{16}$
5. $(D4C9.A2)_{16} \rightarrow (\ldots)_8$
   $(D4C9.A2)_{16} = (1101|0100|1100|1001.1010|0010)_2 = (001|101|010|011|001|001.101|000|100)_2 = (152311.504)_8$
6. $(1|0110|1100|1010)_2 \rightarrow (16CA)_{16}$
7. $(3220)_4 \rightarrow (\ldots)_8$
   $(3220)_4 = (11|10|10|00)_2 = (011|101|000)_2 = (350)_8$
8. $(AB7F)_{16} \rightarrow (\ldots)_4$
   Koristimo da je $4^2 = 16$, pa svaku cifru sistema sa osnovom 16 prikazujemo sa dve cifre sistema sa osnovom 4.
   napr. $(A)_{16} = (10)_{10} = (22)_4$ $(AB7F)_{16} = (22|23|13|33)_4$
9. $(1|20|20|12|20.20|22|1)_3 = (16656.683)_9$